

文章编号: 1000-7598-(2003)02-0141-05

基于广义塑性力学的土体次加载面循环塑性模型(I): 理论与模型

孔 亮^{1, 2}, 郑颖人², 姚仰平³

(1. 宁夏大学 物电学院固体力学研究所, 宁夏 银川 750021; 2. 后勤工程学院土木工程系, 重庆 400041;
3. 北京航空航天大学土木工程系, 北京 100083)

摘 要: 简要地介绍了次加载面理论的基本思想、假设及其物理解释。在广义塑性力学的框架内, 引入次加载面的思想, 把常规的椭圆-抛物线双屈服面模型, 扩展为次加载面循环塑性模型, 以反映循环荷载作用下土体的曼辛效应与棘轮效应。模型能考虑塑性应变增量对应力增量的相关性, 既能反映土体的循环加载特性, 又能反映正常固结土和超固结土的单调加载特性。

关 键 词: 广义塑性力学; 次加载面; 循环塑性; 本构模型

中图分类号: TU 43 文献标识码: A

Subloading surface cyclic plastic model for soil based on Generalized plasticity (I): Theory and model

KONG Liang¹, ZHENG Ying-ren², YAO Yang-ping¹

(1. Department of Physics & Electrical Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China; 3. Department of Civil Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The fundamental ideas and assumptions and their physical interpretations of subloading surface theory are presented. In order to describe the Massing effect and ratcheting effect of soils under cyclic loading, the conventional ellipse-parabola two-surface model is extended to the subloading surface cyclic plastic model by incorporating the *Generalized plasticity* and subloading surface theory. It is concluded that the model is capable of describing the deformation behavior of soil under monotonic and cyclic loading.

Key words: *Generalized plasticity*; subloading surface; cyclic plasticity; constitutive model

1 前 言

常规的弹塑性本构方程假设屈服面内部是一个弹性域, 无论应力如何改变都没有塑性变形产生, 即只有纯弹性变形产生。它只能描述应力达到屈服状态的显著塑性变形, 而不可能用来描述应力在屈服面内变化而产生的塑性变形, 即它不能用来反映材料的循环加载特性。而另一方面, 预测循环加载所引起的塑性变形是一个越来越重要的工程实际问题, 如对承受振动荷载的机器的设计以及建筑物或土工结构物的抗震设计等。所以, 对常规塑性理论扩展为能够描述应力在屈服面内变化引起的塑性变

形是塑性理论发展不可避免的一步。为此, 自 20 世纪 60 年代以来, 在抛弃常规塑性方程假设的基础上, 开展了对非常规弹塑性本构方程的研究, 并提出了各种各样的模型, 如多面模型、两面模型、边界面模型、次加载面模型等^[1~3]。因为这些模型的主要目的是预测材料的循环加载特性, 所以, 把它们叫做循环塑性模型。

目前, 所建立的循环塑性模型虽然各有其特点, 为循环塑性模型的发展贡献了自己的想法, 但它们都建立在经典塑性力学的基础上, 并且, 大多数模型首先都用来模拟金属的循环加载特性, 然后, 再推广到土体中。由于经典塑性力学应用于岩土

多局限性, 必然导致这些模型所预测的土体的循环加载特性有许多不符合实际的情况, 比如, 无法反映塑性应变增量对应力增量的相关性, 从而不能较好地反映曼辛效应 (滞回特性)、棘轮效应 (塑性应变的积累性) 等材料的主要循环加载特性。从最初的多面模型发展到后来的边界面模型以及次加载面模型, 是在经典塑性力学的基础上对某些局部的缺陷进行修改而发展和完善的思路, 没有从建模理论的角度考虑。所以, 笔者认为, 这就是这些模型仍有许多不尽人意的地方的根本原因。

广义塑性力学是经典塑性力学的扩展^[4-7], 既适用于金属又适用于岩土材料, 可作为岩土材料的建模基础。随着广义塑性力学研究的进一步深入, 建立基于广义塑性力学的土体的循环塑性模型是一个迫在眉睫的课题。另一方面, 在循环塑性模型研究中, 日本学者 Hashiguchi 提出次加载面 (subloading surface) 的概念而建立了一套较完善的次加载面理论^[8,9], 能较好地反映材料的循环加载特性。那么, 把广义塑性力学与次加载面思想有机的结合将是一个有益的尝试。

鉴于次加载面理论的特点和新颖性, 以及国内对这个理论还没有引入和研究过, 本文首先简要介绍次加载面理论的基本思想、假设及其物理解释, 然后, 在广义塑性力学的基础上, 引入次加载面理论的思想建立一个土体的循环塑性模型。

2 次加载面理论简介^[8]

2.1 基本思想

假设在反映材料变形历史的正常屈服面 (常规模型的屈服面) 的内部存在一个与之保持几何相似的次加载面, 它不管在加载还是卸载状态下都始终通过当前应力点而扩大或缩小 (如图 1 所示)。塑性

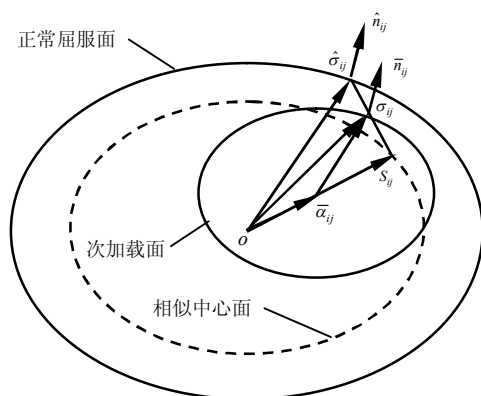


图 1 正常屈服面与次加载面示意图

Fig.1 Normal-yield surface and subloading surface

模量用次加载面与正常屈服面大小的比值来表示, 因此, 不存在一个纯弹性域, 塑性模量也连续变化。这样, 就描述了在加载过程中连续的应力率-应变率的关系, 弹性到塑性也光滑地转变。并且, 加载准则不需要判断应力点是否位于屈服面上, 因为, 应力始终位于次加载面上。

2.2 假设

(1) 在正常屈服面内存在一个叫“次加载面”的面, 它不管加载 (弹塑性) 过程还是卸载 (弹性) 过程都始终通过当前应力点而扩大或缩小。

(2) 次加载面与正常屈服面形状相似, 并且位置也相似, 保持相同的朝向而无相对旋转。这样, 对于特定形状的正常屈服面和次加载面存在一个相似中心, 相似中心的位置向量用 S_{ij} 表示。另外, 据假设 (1), 相似中心必须位于正常屈服面的内部。

(3) 相似中心在加载 (弹塑性) 过程中移动 (更确切地讲是仅能), 但在卸载 (弹性) 过程中不移动。

由于这个假设, 相似中心可以认为是一个与常规塑性模型中等向硬化参量 F 和移动硬化参量 $\hat{\alpha}_{ij}$ 一样的塑性内状态变量。另一方面, 次加载面的几何中心用 $\bar{\alpha}_{ij}$ 表示, 它不是塑性内变量。因为, 根据假设 (1), 在卸载 (弹性) 过程中它也在演化。 $\bar{\alpha}_{ij}$ 可由 σ_{ij} , F , $\hat{\alpha}_{ij}$ 和 S_{ij} 的几何关系确定, 因为, 次加载面与正常屈服面几何相似且朝向相同。

(4) 次加载面与正常屈服面的大小之比, 叫做“NS-面尺寸比” (简称为“NSR”) 并用 R 表示。NSR 的变化范围从 0 到 1。当塑性变形产生时, NSR 增大并接近 1; 反过来, 当 NSR 增加时, 则有塑性变形产生。

由于该假设, 当纯弹性变形产生时, NSR 减少或不变; 反过来, 当 NSR 减少或不变时, 只有弹性变形产生。因此, 次加载面充当加载面的角色, 这就是为何叫“次加载面”的物理背景。另外, 在加载准则中不需要判断应力是否位于次加载面上, 因为, 由假设 (1) 可知应力始终位于加载面上。而在传统模型中则需要判断应力是否位于屈服面上。

(5) 当 NSR 等于 1, 即应力点位于正常屈服状态, 应力率-应变率的关系即为常规本构方程。这个假设导致次加载面模型是常规模型的扩展, 而没有跳跃它。

2.3 假设的物理解释

上述假设的物理意义可用图 2 所示的单轴向加载情况来解释。图中 S 和 $\bar{\alpha}$ 分别是相似中心 S_{ij} 和次加载面中心 $\bar{\alpha}_{ij}$ 的轴向分量。由于初始各向同性的

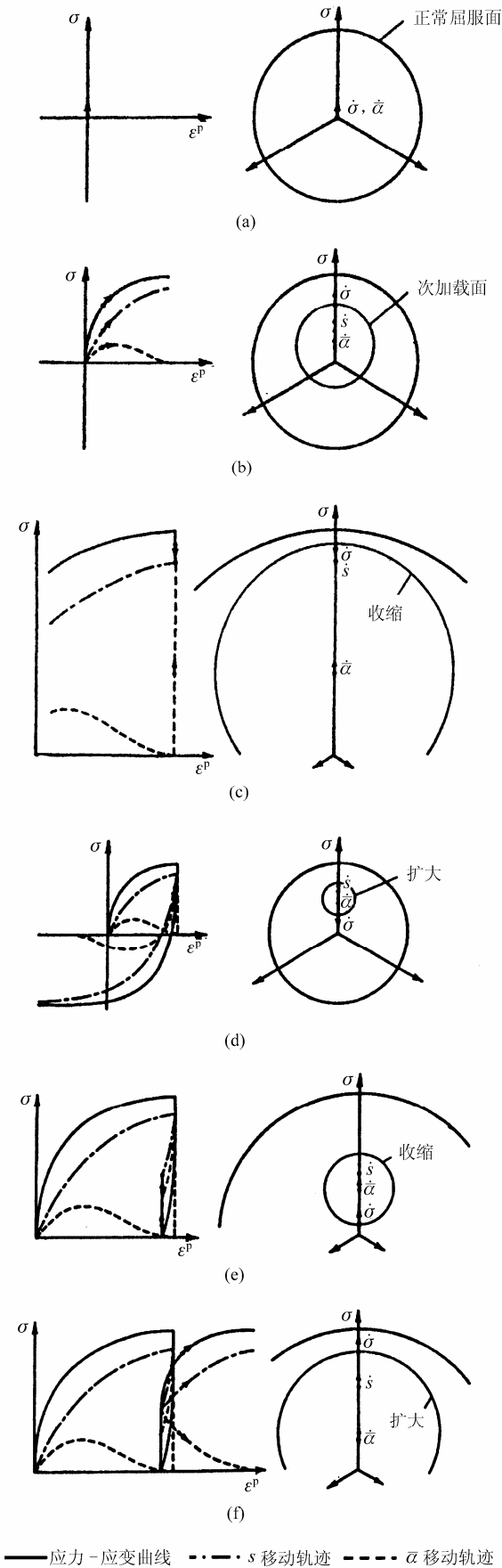


图2 次加载面模型所预测的单轴向加载特性示意图
Fig.2 A schematic diagram of uniaxial loading behavior predicted by the subloading surface model

假设, 在初始加载时, 相似中心位于应力空间的坐标原点, 次加载面只是一个点而无大小, 如图 2 (a) 所示。随后, 次加载面随应力的增加而逐渐扩大, 导致塑性变形的产生, 相似中心也随应力而移动, 如图 2 (b) 所示。另一方面, 在图 2 (c) 所示的卸载过程中, 次加载面逐渐收缩, 当应力减少到相似中心位置时收缩为一个点。这样, 在这个过程中仅产生弹性变形, 因此, 相似中心不移动。但当应力超过相似中心的位置后, 次加载面再次扩大而逐渐产生塑性变形, 因此, 相似中心开始移动, 如图 2 (d) 所示。换言之, 在应力消失之前就有塑性变形产生, 这样, 就可在一定程度上描述曼辛规则。另外, 在图 2 (e) 所示的再加载过程中, 次加载面逐渐收缩, 当应力增加到相似中心位置时收缩为一点。这样, 在这个过程中, 只有弹性变形产生, 相似中心不移动, 类似于上面提到的初始卸载阶段。随后, 次加载面扩大而产生塑性变形, 相似中心随应力点而移动, 以这种方式描述了封闭的滞回环, 如图 2 (f) 所示。然而, 在纯弹性变形阶段一个小的卸载后就立即重加载, 则导致开放的滞回环 (即在图 2 (c) 中, σ 还没有减少到 S 时就增加)。

3 循环塑性模型的建立

3.1 正常屈服面

假定应力空间中正常屈服面用下方方程表示

$$f(\hat{\sigma}_{ij}) - F(H) = 0 \quad (1)$$

式中 二阶张量 $\hat{\sigma}_{ij}$ 是位于次加载面上当前应力 σ_{ij} 在正常屈服面上的对偶应力, 它们具有相同的外法线方向; 标量 H 是描述屈服面胀缩的内状态变量, 即等向硬化参量。当应力 σ_{ij} 位于正常屈服面上时, $\hat{\sigma}_{ij}$ 即为 σ_{ij} 。

按照广义塑性理论应分别建立常规的体积屈服面、 q 方向上剪切屈服面与洛德角 θ_σ 方向上的剪切屈服面。但作为初次研究, 暂不考虑 θ_σ 方向上的剪切屈服面, 并且, 略去洛德角 θ_σ 对体积屈服面与剪切屈服面的影响。正常的体积屈服面采用殷宗泽双屈服面模型^[10]中的体积屈服面, 其具体形式为

$$f_v(\hat{\sigma}_{vij}) = f_v(\hat{p}_v, \hat{q}_v) = \hat{p}_v + \frac{\hat{q}_v^2}{M_1^2(\hat{p}_v + p_r)} = F_v(\varepsilon_v^p) = \frac{h\varepsilon_v^p}{1 - t\varepsilon_v^p} p_a \quad (2)$$

式中 下标 v 表示体积屈服面的变量; $\hat{\sigma}_{vij}$ 是当前应力 σ_{ij} 在正常体积屈服面上的对偶应力; p_r 为破坏线 $q_f - p$ 在 p 轴上的截距; ε_v^p 为塑性体积应变;

M_1 为稍大于破坏线斜率 M 的参数; h, t 为土的参数, 其意义详见文献[10]; p_a 为一个大气压。

$$\hat{p}_v = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_{v1} + \hat{\sigma}_{v2} + \hat{\sigma}_{v3}) = \frac{1}{3}\hat{\sigma}_{vii} \quad (3)$$

$$\hat{q}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\hat{\sigma}_{v1} - \hat{\sigma}_{v2})^2 + (\hat{\sigma}_{v2} - \hat{\sigma}_{v3})^2 + (\hat{\sigma}_{v3} - \hat{\sigma}_{v1})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\hat{\sigma}_{vij} - \hat{p}_v \delta_{ij})(\hat{\sigma}_{vij} - \hat{p}_v \delta_{ij})} \quad (4)$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 即当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$; 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$ 。在应力空间式 (2) 所表示的为一椭球面, 在子午平面上是一椭圆, 如图 3 所示。

正常的剪切屈服面也采用殷宗泽双屈服面模型中的抛物线剪切屈服面, 其形式为

$$f_\gamma(\hat{\sigma}_{\gamma ij}) = f_\gamma(\hat{p}_\gamma, \hat{q}_\gamma) = \frac{a\hat{q}_\gamma}{G} \sqrt{\frac{\hat{q}_\gamma}{M_2(\hat{p}_\gamma + p_r) - \hat{q}_\gamma}} = F_\gamma(\gamma^p) = \gamma^p \quad (5)$$

式中 下标 γ 表示剪切屈服面的变量; $\hat{\sigma}_{\gamma ij}$ 是当前应力 σ_{ij} 在正常剪切屈服面上的对偶应力; G 是弹性剪切模量; M_2 是比 M 略大的参数; a 为材料参数。

$$\hat{p}_\gamma = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_{\gamma 1} + \hat{\sigma}_{\gamma 2} + \hat{\sigma}_{\gamma 3}) = \frac{1}{3}\hat{\sigma}_{\gamma ii} \quad (6)$$

$$\hat{q}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\hat{\sigma}_{\gamma 1} - \hat{\sigma}_{\gamma 2})^2 + (\hat{\sigma}_{\gamma 2} - \hat{\sigma}_{\gamma 3})^2 + (\hat{\sigma}_{\gamma 3} - \hat{\sigma}_{\gamma 1})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\hat{\sigma}_{\gamma ij} - \hat{p}_\gamma \delta_{ij})(\hat{\sigma}_{\gamma ij} - \hat{p}_\gamma \delta_{ij})} \quad (7)$$

在应力空间式 (5) 所表示的为一旋转抛物面, 在子午平面上是两条以 p 轴对称的抛物线, 如图 4 所示。

3.2 次加载面

由次加载面理论的基本假设可知, 在正常屈服面的内部存在一个与之保持几何相似的次加载面, 它不管在加载还是卸载状态下都始终通过当前应力点而扩大或缩小, 如图 1 所示。当前应力点用应力张量 σ_{ij} 表示, 相似中心用张量 S_{ij} 表示。次加载面用类似于式 (1) 的形式表示为

$$f(\bar{\sigma}_{ij}) = RF \quad (8)$$

$$\text{其中} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \quad (9)$$

式中 $\bar{\alpha}_{ij}$ 是次加载面的几何中心; 次加载面与正常屈服面大小比率 R 可表示为

$$R = f(\bar{\sigma}_{ij}) / F \quad (10)$$

在本文的循环塑性模型中 R 起着重要的作用, 表示正常屈服面内塑性模量的连续变化, 进而预测光滑的应力-应变曲线。

根据次加载面模型的假设有下面的几何关系 (参照图 1)

$$\bar{S}_{ij} = RS_{ij} \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = R\hat{\sigma}_{ij} \quad (12)$$

$$\bar{n}_{ij} = \hat{n}_{ij} \quad (13)$$

式中

$$\bar{S}_{ij} = S_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \quad (14)$$

$$\hat{n}_{ij} = \frac{\partial f(\hat{\sigma}_{ij})}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f(\hat{\sigma}_{ij})}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} \right\| \quad (15)$$

$$\bar{n}_{ij} = \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{ij})}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{ij})}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \right\| \quad (16)$$

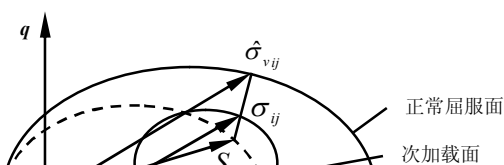
上面出现的变量 σ_{ij} 、 F 、 S_{ij} 、 R 、 $\bar{\alpha}_{ij}$ 和 $\hat{\sigma}_{ij}$ 中, 只有 3 个是独立的。把当前应力 σ_{ij} 和塑性内状态变量 F 和 S_{ij} 作为基本变量, 其余变量都可以用基本变量进行表示。由上列诸式可得

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} = \sigma_{ij} - (1-R)S_{ij} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} / R = S_{ij} + (\sigma_{ij} - S_{ij}) / R \quad (18)$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = (1-R)S_{ij} \quad (19)$$

将式 (17) 代入式 (8) 或将式 (18) 代入式 (1)



可计算出变量 R 的值。

由式 (2), (8) 可得次体积屈服面的表达式为

$$f_v(\bar{\sigma}_{vij}) = f_v(\bar{p}_v, \bar{q}_v) = \bar{p}_v + \frac{\bar{q}_v^2}{M_1^2(\bar{p}_v + p_r)} = R_v F_v(\varepsilon_v^p) \quad (20)$$

式中 R_v 为次体积屈服面与正常体积屈服面的大小比

$$\bar{p}_v = \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{v1} + \bar{\sigma}_{v2} + \bar{\sigma}_{v3}) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{vii} \quad (21)$$

$$\bar{q}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_{v1} - \bar{\sigma}_{v2})^2 + (\bar{\sigma}_{v2} - \bar{\sigma}_{v3})^2 + (\bar{\sigma}_{v3} - \bar{\sigma}_{v1})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma}_{vij} - \bar{p}_v \delta_{ij})(\bar{\sigma}_{vij} - \bar{p}_v \delta_{ij})} \quad (22)$$

M_1, p_r 等模型参数同式 (2)。在子午平面上式 (20) 所表示的是一个位于正常体积屈服面内, 并与之保持相似的椭圆, 如图 3 所示。

类似于式 (17) ~ (19) 有

$$\bar{\sigma}_{vij} = \sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{vij} = \sigma_{ij} - (1 - R_v) S_{vij} \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_{vij} = \bar{\sigma}_{vij} / R_v = S_{vij} + (\sigma_{ij} - S_{vij}) / R_v \quad (24)$$

$$\bar{\alpha}_{vij} = (1 - R_v) S_{vij} \quad (25)$$

式中 S_{vij} 为次体积屈服面与正常体积屈服面的相似中心; $\bar{\alpha}_{vij}$ 对于本文的体积屈服面应把它理解为坐标参考点, 而不是通常次加载面理论中的几何中心 (图 3)。

由式 (5), (8) 可得次剪切屈服面的表达式为

$$f_\gamma(\bar{\sigma}_{\gamma ij}) = f_\gamma(\bar{p}_\gamma, \bar{q}_\gamma) = \frac{a\bar{q}_\gamma}{G} \sqrt{\frac{\bar{q}_\gamma}{M_2(\bar{p}_\gamma + p_r) - \bar{q}_\gamma}} = R_\gamma F_\gamma(\gamma^p) \quad (26)$$

式中 R_γ 为次剪切屈服面与正常剪切屈服面的大小比

$$\bar{p}_\gamma = \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{\gamma 1} + \bar{\sigma}_{\gamma 2} + \bar{\sigma}_{\gamma 3}) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{\gamma ii} \quad (27)$$

$$\bar{q}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_{\gamma 1} - \bar{\sigma}_{\gamma 2})^2 + (\bar{\sigma}_{\gamma 2} - \bar{\sigma}_{\gamma 3})^2 + (\bar{\sigma}_{\gamma 3} - \bar{\sigma}_{\gamma 1})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma}_{\gamma ij} - \bar{p}_\gamma \delta_{ij})(\hat{\sigma}_{\gamma ij} - \bar{p}_\gamma \delta_{ij})} \quad (28)$$

M_2, p_r, a 等模型参数同式 (5)。在子午平面上式 (26) 所表示的曲线如图 4 所示。

类似于式 (17) ~ (19) 有

$$\bar{\sigma}_{\gamma ij} = \sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{\gamma ij} = \sigma_{ij} - (1 - R_\gamma) S_{\gamma ij} \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_{\gamma ij} = \bar{\sigma}_{\gamma ij} / R_\gamma = S_{\gamma ij} + (\sigma_{ij} - S_{\gamma ij}) / R_\gamma \quad (30)$$

$$\bar{\alpha}_{\gamma ij} = (1 - R_\gamma) S_{\gamma ij} \quad (31)$$

式中 $S_{\gamma ij}$ 为次剪切屈服面与正常剪切屈服面的相似

中心; $\bar{\alpha}_{\gamma ij}$ 为次剪切屈服面的坐标参考点 (图 4)。

4 结 语

次加载面理论, 假设正常屈服面的内部存在一个与之保持几何相似的次加载面, 它不管在加载还是卸载状态下都始终通过当前应力点而扩大或缩小。塑性模量用次加载面与正常屈服面大小的比值来表示, 不存在一个纯弹性域, 塑性模量连续变化, 从而, 较适合用来描述材料的循环加载特性。本文引入次加载面的思想, 应用广义塑性力学原理, 把常规的椭圆-抛物线双屈服面模型扩展到次屈服状态, 导出了相应的次体积屈服面与次剪切屈服面, 建立了用来反映循环荷载作用下土体曼辛效应与棘轮效应的次加载面循环塑性模型。模型能考虑塑性应变增量对应力增量的相关性, 既能反映土体的循环加载特性, 又能反映正常固结土和超固结土的单调加载特性。本构方程与加卸载准则的推导、模型参数的确定方法以及模型的验证, 由于篇幅所限, 容后文介绍。

参 考 文 献

- [1] 陈惠发[美]. 土木工程材料的本构方程 (第二卷 塑性与建模) [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.
- [2] Hashiguchi K. Mechanical requirement and structures of cyclic plasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(6): 721-748.
- [3] Hashiguchi K. Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(5): 525-549.
- [4] 郑颖人, 孔亮. 塑性力学的分量理论—广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 269-274.
- [5] 郑颖人. 广义塑性力学讲座 (1) —广义塑性力学理论[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 188-191.
- [6] 郑颖人, 段建立, 陈瑜瑶. 广义塑性力学讲座 (2) —广义塑性力学中的屈服面与应力应变关系[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 305-308.
- [7] 郑颖人, 陈瑜瑶, 段建立. 广义塑性力学讲座 (3) —广义塑性力学的加卸载准则与土的本构模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 426-429.
- [8] Hashiguchi K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. *Int J Solids Structure*, 1989, 25(8): 917-945.
- [9] Hashiguchi K, Chen Z P. Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and rotational hardening[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1998, 22: 197-227.
- [10] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变关系[J]. 岩土工程学报, 1988, 6 (4): 24-40.